

VIII. KOMBINATORIKA A PRAVDĚPODOBNOST

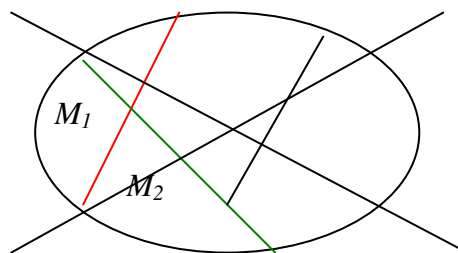
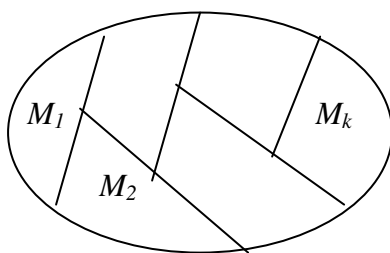
§1. Základní kombinatorická pravidla

V.1.1. Pravidlo součtu

Nechť M je konečná množina, $M_1, M_2, \dots, M_k, k \in \mathbb{N}$, jsou její podmnožiny takové, že

- I. $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k = M$
- II. $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro lib. $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j$ (tzn. množiny M_1 až M_k jsou po dvou disjunktní).

Pak platí $|M| = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_k|$, kde symbolem $|M|$, resp. $|M_i|$ značíme počet prvků množiny M , resp. M_i .



[Dk.:]

Pozn.: Věta V.1.1 aplikuje pojem tzv. rozkladu množiny M pro případ, kdy je množina M konečná.

Def.: Nechť M je neprázdná množina. Rozklad R množiny M značíme $R(M)$ a definujeme jako neprázdný systém neprázdných podmnožin $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, k \in \mathbb{N}$, pro které platí $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k \cup \dots = M$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro lib. $i, j \in \{1, 2, \dots, k, \dots\}, i \neq j$. Množiny $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$ nazýváme třídami rozkladu $R(M)$.

V.1.2.: Pravidlo součinu

Nechť $M_1, M_2, \dots, M_k, k \in \mathbb{N}$, jsou konečné množiny takové, že $|M_1| = m_1, |M_2| = m_2, \dots, |M_k| = m_k$, pak platí:

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k,$$

kde $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k = \{[a_1, a_2, \dots, a_k], a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_k \in M_k\}$

[Dk.:]

Pozn.: Pravidlo součinu se v kombinatorice formuluje většinou takto:

Lze-li uspořádanou k -tici objektů vybrat tak, že první prvek vybíráme m_1 způsoby, druhý prvek vybíráme m_2 způsoby, ..., k -tý prvek vybíráme m_k způsoby a přitom výběry jednotlivých prvků na sobě nezávisí, pak je počet všech uspořádaných k -tic $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

V.1.3.: Dirichletův princip

Má-li být alespoň $nk + 1$ předmětů rozděleno do k přihrádek, pak alespoň v jedné přihrádce je alespoň $n + 1$ předmětů.

[Dk.:]

§2. Pořadí, variace, kombinace bez opakování

Def.: Necht' M je konečná n -prvková množina ($|M| = n$).
Uspořádanou n -tici prvků z množiny M , v níž se každý prvek vyskytuje právě jednou, nazveme pořadím prvků z množiny M (pořadí z n -prvků, permutací z n -prvků).
Počet všech pořadí z n prvků označme $P(n)$.

V.2.1.: Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:
$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n! \quad (\text{čteme faktoriál})$$

[Dk.:]

Def.: Pro lib. číslo $n \in \mathbb{N}$ definujeme
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

$$0! = 1$$

a nazveme n -faktoriál

Def.: Necht' M je konečná n -prvková množina, $k \leq n$.
 k -prvkovou variací z prvků množiny M (k -prvkovou variací z n prvků, variací k -té třídy z n prvků) nazveme libovolnou uspořádanou k -tici, v níž se každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.
Počet všech k -prvkových variací z n prvků budeme značit $V(k, n)$.

V.2.2.: Necht' $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Pak platí:
$$V(k, n) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k\text{-cinitel}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

[Dk.:]

Pozn.: Pořadí n -prvkové množiny je tedy n -prvková variace n -prvkové množiny.

Def.: Necht' M je konečná n -prvková množina. Necht' $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$.
Libovolnou k -prvkovou podmnožinu množiny M nazýváme k -prvkovou kombinací prvků z prvků množiny M (k -prvkovou kombinací z n prvků, kombinací k -té třídy z n prvků).
Počet všech k -prvkových kombinací všech prvků značíme $K(k, n)$.

Pozn.:

1. Místo pojmu podmnožina bychom mohli hovořit o neuspořádané k -tici prvků množiny M , v níž je každý z prvků použit nejvýše jednou.
2. Variace a kombinace se tedy liší uspořádaností.

V.2.3.: Necht' $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, pak platí:
$$K(k, n) = \frac{V(k, n)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

[Dk.:]

Pozn.: Pro $n=0$ a $k=0$ klademe $K(0,0) = 1$ (neboť $0! = 1$)

Def.: Necht' $k, n \in \mathbf{N}_0$, $k \leq n$, pak definujeme

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, čteme „ n nad k “ a výraz $\binom{n}{k}$ nazýváme kombinačním číslem (resp. binomickým koeficientem).

Pozn.: 1. $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$

2. vzhledem k tomu, že kombinační číslo udává počet všech podmnožin $\Rightarrow \binom{n}{k} \in \mathbf{N}$

V.2.4.: Necht' $k, n \in \mathbf{N}_0$, $k \leq n$, pak platí

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $k < n$

[Dk.:]

§3. Binomická věta

V.3.1.: Binomická věta

$\forall n \in \mathbf{N}; \forall a, b \in \mathbf{R}$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

[Dk.:]

Pozn.: Binomický rozvoj $(a+b)^n$ obsahuje $n+1$ sčítanců.

k -tý člen rozvoje je tvaru $\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$

Pozn.: Pro rychlý výpočet koeficientů zapisujeme kombinační čísla do tzv. Pascalova trojúhelníku.

Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \binom{0}{0} \\ & & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & & & & \\ & 1 & & 1 & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ & & & & & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & & = & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ & & & & & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \end{array}$$

Pozn.: Z binomické věty dostáváme pro a), b) zajímavé součty a vzorce

a) $a = b = 1$

$$S_1 = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Je to počet všech podmnožin n -prvkové množiny

b) $a = 1, b = -1$

$$S_2 = (1+(-1))^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

§4. Pořadí, variace, kombinace s opakováním

Def.: Necht' je dáno n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, ..., n_d prvků d -tého druhu (prvky téhož druhu považujeme za nerozlišitelné). Necht' $n_1 + n_2 + \dots + n_d = n$. Pořadím s opakováním (permutací s opakováním) z n_1 prvků 1.druhu, n_2 prvků 2.druhu, ..., n_d prvků d -tého druhu nazveme každou uspořádanou n -tici, která obsahuje n_1 prvků 1.druhu, n_2 prvků 2.druhu, ..., n_d prvků d -tého druhu. Počet všech těchto pořadí označíme $P_o(n_1, n_2, \dots, n_d)$.

Pozn.: Dvě pořadí s opakováním považujeme za různá, jestliže alespoň na jednom místě jsou prvky různých druhů.

V.4.1.: Necht' $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbf{N}$ jsou čísla taková, že $n_1 + n_2 + \dots + n_d = n$. Pak platí:

$$P_o(n_1, n_2, \dots, n_d) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_d!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^d n_i\right)!}{\prod_{i=1}^d n_i!}$$

[Dk.:]

Def.: Necht' je dáno n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, ..., n_d prvků d -tého druhu. Necht' $k \in \mathbf{N}$: $k \leq n_i$ pro $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$. k -prvkovou variací s opakováním z prvků daných d druhů nazveme každou uspořádanou k -tici vytvořenou z prvků těchto d druhů. Počet všech těchto variací označíme $V_o(k, d)$.

Pozn.: Dvě variace s opakováním považujeme za různé, jestliže alespoň na jednom místě jsou prvky různých druhů.

V.4.2.: Pro $\forall k, d \in \mathbf{N}$ platí:

$$V_o(k, d) = \underbrace{d \cdot d \cdot \dots \cdot d}_k = d^k$$

[Dk.:]

Def.: Necht' je dáno n_1 prvků prvního druhu, n_2 prvků druhého druhu, ..., n_d prvků d -tého druhu. Necht' $k \in \mathbf{N}$: $k \leq n_i$ pro $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$. k -prvkovou kombinací s opakováním z prvků daných d druhů nazveme každou neuspořádanou k -tici vytvořenou z prvků těchto d druhů. Počet všech těchto kombinací označíme $K_o(k, d)$.

Pozn.: Dvě kombinace s opakováním považujeme za různé, jestliže se liší počtem prvků alespoň jednoho druhu.

Př.!:

V.4.3.: $\forall k, d \in \mathbf{N} : K_o(k, d) = P_o(k, d-1) = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} = \binom{k+d-1}{k} = \binom{k+d-1}{d-1}$

[Dk.:!]

§5. Kombinatorické úlohy s omezujícími podmínkami

Př !.:

§6. Kombinatorická geometrie

Př !.:

§7. Součty k -tých mocnin

Pozn.: Jsou to součty typu:

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$S_0(n) = n$$

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

V.7.1.: $\forall k, n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n}{k+1}$$

[Dk.:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}, \quad \binom{k+1}{k+1} + \binom{k+1}{k} = \binom{k+2}{k+1} \Rightarrow \dots \Rightarrow \binom{k+n-1}{k+1} + \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n}{k+1}$$

]

Pozn.: $k=1$

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \dots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \Rightarrow S_1(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$k=2$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

$$1 + \frac{3 \cdot 2}{2!} + \frac{4 \cdot 3}{2!} + \dots + \frac{(n+1) \cdot n}{2!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$S_2^*(n) = 2K = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + (n+1) \cdot n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$S_2^*(n) = \sum_{i=1}^n i(i+1) = \sum_{i=1}^n (i^2 + i) = (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + \dots + (n^2 + n)$$

$$S_2^*(n) = S_2(n) + S_1(n) \Rightarrow S_2(n) = S_2^*(n) - S_1(n)$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

§8. Princip inkluze a exkluze

Pozn.: $|M|$... počet prvků množiny M

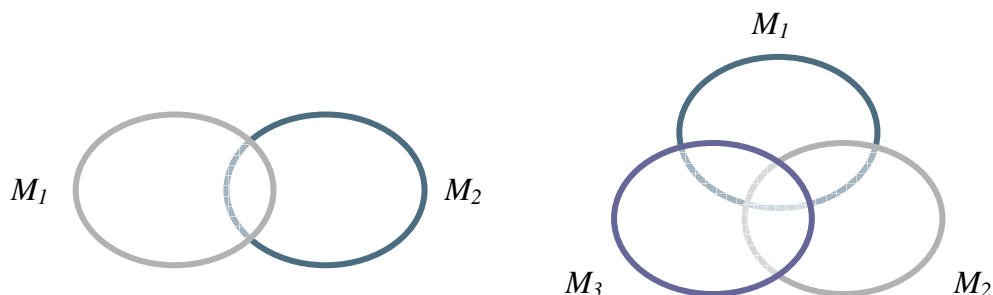
Je-li dáno k konečných množin $M_1, M_2, \dots, M_k$, vyjádříme počet prvků jejich sjednocení pomocí počtu prvků množin a jejich průniků:

$k=2$:

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$$

$k=3$:

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$$



V.8.1.: Princip inkluze a exkluze

Nechť $M_1, M_2, \dots, M_k$ jsou konečné množiny. Pak platí:

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| &= |M_1| + |M_2| + \dots + |M_k| - \\ &\quad - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \dots - |M_1 \cap M_k| - \dots - |M_{k-1} \cap M_k| + \\ &\quad + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \dots + |M_{k-2} \cap M_{k-1} \cap M_k| - \dots \\ &\quad \dots \\ &\quad + (-1)^{k+1} |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k| \\ &= \sum (-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \dots \cap M_{j_r}|, \end{aligned}$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ množiny $\{1, 2, \dots, r\}$

[Dk.:

Zvolme libovolný prvek $m \in M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$.

Je zřejmé, že na levé straně je prvek m započítán jednou.

Nechť $M_{q_1}, M_{q_2}, \dots, M_{q_s}$ jsou právě ty množiny, ve kterých se prvek m nachází, tzn.

$$m \in M_{q_1} \cap M_{q_2} \cap \dots \cap M_{q_s}.$$

Prvek m je započítán v těch množinách $M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \dots \cap M_{j_r}$ pro které platí:

$$\emptyset \neq \{j_1, j_2, \dots, j_r\} \subseteq \{q_1, q_2, \dots, q_s\}.$$

$\forall r \in \{1, 2, \dots, s\}$ je prvek m započítán v $\binom{s}{r}$ sčítancích tvaru

$M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \dots \cap M_{j_r}$, pro $r > s$ v žádném.

Celkový „příspěvek“ prvku m na pravé straně vzorce:

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \dots + (-1)^{s+1} \binom{s}{s} = \underbrace{-\binom{s}{0} + \binom{s}{1} + \dots + (-1)^{s+1} \binom{s}{s} + \binom{s}{0}}_0 = 1]$$

Pozn.: Uvedený součet má $2^k - 1$ sčítanců.

Součet je zapsán tak, že na i -tém řádku jsou sčítance, které odpovídají i -prvkovým podmnožinám z množiny indexů $\{1, 2, \dots, k\}$ (viz. V.8.1.), kdy na i -tém řádku budu mít

celkem $\binom{k}{i}$ sčítanců.

Pozn.: Princip inkluze a exkluze se používá k určení počtu objektů, které mají alespoň jednu z vybraných k -vlastností. Označíme-li pro $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ M_i množinu všech objektů, které mají i -tou vlastnost, pak hledáme počet prvků množiny $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$, tedy $|M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k|$.

Př !: